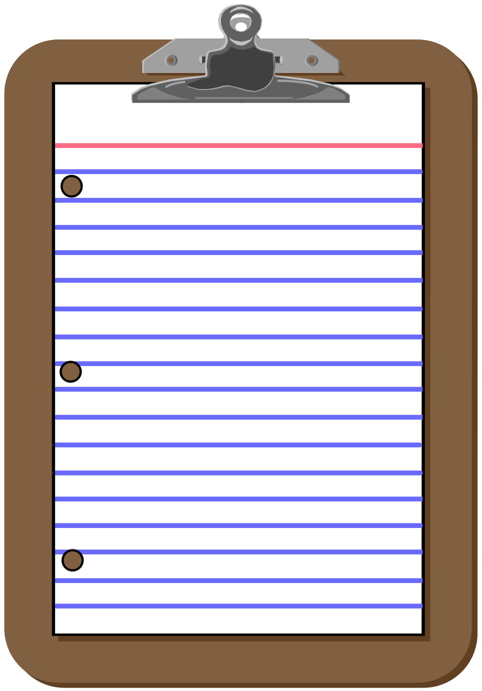
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Επιχειρησιακή Έρευνα

Γραφική Λύση & Πρότυπη Μορφή Μαθηματικού Μοντέλου

Η παρουσίαση προετοιμάστηκε από τον Ν.Α. Παναγιώτου

Περιεχόμενα Παρουσίασης

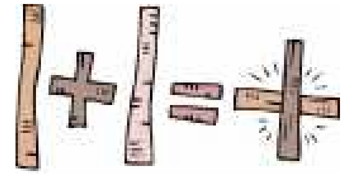


1. **Προϋποθέσεις Εφαρμογής ΓΠ**
2. **Γραφική Λύση Προβλήματος ΓΠ**
3. **Πρότυπη Μορφή Μαθηματικού Μοντέλου Γενικού Προβλήματος**
4. **Συμπεράσματα**

Αναλογικότητα

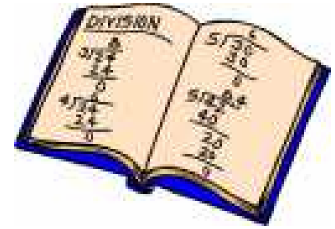
- Η αντικειμενική συνάρτηση και όλοι οι περιορισμοί του προβλήματος πρέπει να είναι γραμμικές συναρτήσεις
- Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης και η χρησιμοποίηση των διαθέσιμων μέσων πρέπει να είναι ποσά ανάλογα προς τις ποσότητες κάθε μιας δραστηριότητας
- Η διαμόρφωση ενός γραμμικού προβλήματος αποτελεί συνήθως προσέγγιση
- Περιπτώσεις μη γραμμικότητας:
  – Δ = 0 εάν x=0 και K+cx εάν X>0
  – Μοναδιαίο κέρδος και αριθμός ανθρωποωρών ανά μονάδα παραγωγής
  – Όγκος πωλήσεων και κέρδος

Προσθετικότητα



- Όλες οι δραστηριότητες πρέπει να είναι προσθετικές όσον αφορά στο μέτρο αποτελεσματικότητας ή την χρησιμοποίηση των διαθέσιμων μέσων. Πχ.:
  – Εταιρεία που παράγει δύο ανταγωνιστικά προϊόντα. Αν πουλά μόνο το ένα (κέρδος c1x1) ή το άλλο (κέρδος c2x2) δεν σημαίνει ότι πουλώντας και τα δύο το κέρδος θα είναι c1x1+ c2x2 (μπορεί οι τιμές c1 και c2 να μειωθούν)
  – Η παραγωγή υποπροϊόντος με χρησιμοποίηση Α' υλών που έχουν χρησιμοποιηθεί για παραγωγή ενός άλλου κύριου προϊόντος

Διαιρετότητα



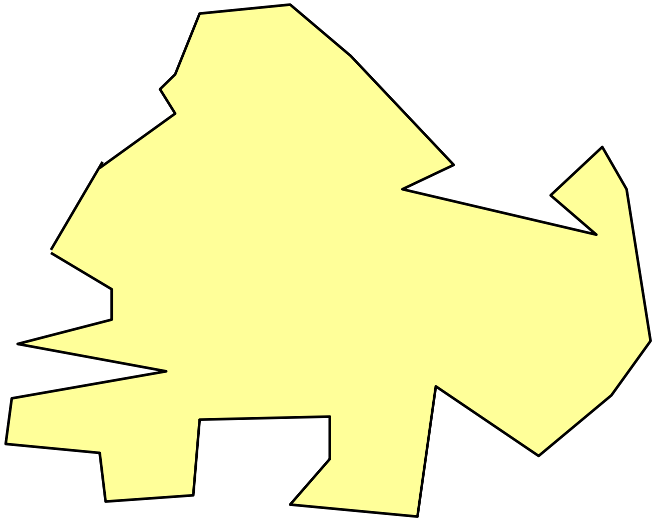
- Θα πρέπει να είναι επιτρεπτές τυχούσες δεκαδικές τιμές των μεταβλητών αποφάσεως
- Η συνηθέστερη διαδικασία που ακολουθείται στην περίπτωση μη ακέραιας λύσης είναι η στρογγυλοποίηση, η οποία δεν είναι πάντα σωστή (είναι επιτυχής όταν η λύση του ΓΠ έχει σαν τιμές των μεταβλητών αποφάσεως πολύ μεγάλους αριθμούς)

Προσδιορισμένοι Συντελεστές

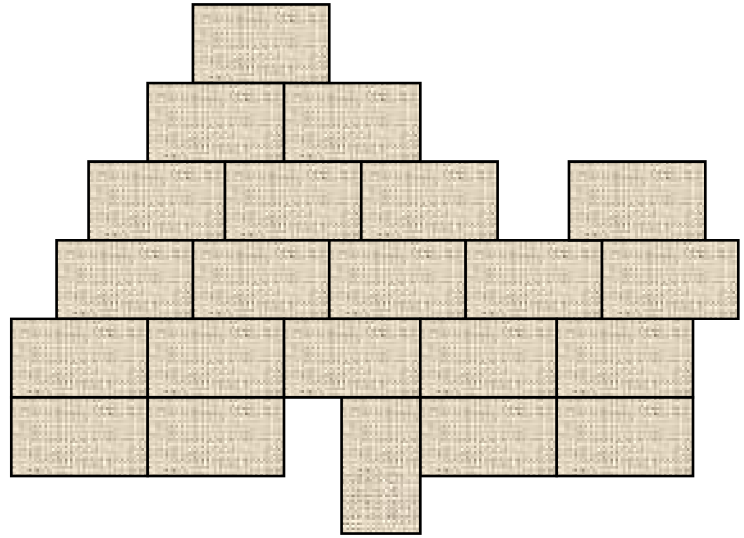
a_{ij}, b_i, c_j

- Όλοι οι συντελεστές ενός μοντέλου ΓΠ θεωρούνται σα γνωστές και σταθερές .Στην πράξη μπορεί να είναι:
  - άγνωστες σταθερές
  - τυχαίες μεταβλητές με μια κατανομή πιθανότητας
- Μέθοδοι παρακάμψεως του προβλήματος είναι οι εξής:
  - Ανάλυση ευαισθησίας
  - Παραμετρικός προγραμματισμός
  - Στοχαστικός προγραμματισμός

Τι Ισχύει στην Πράξη...

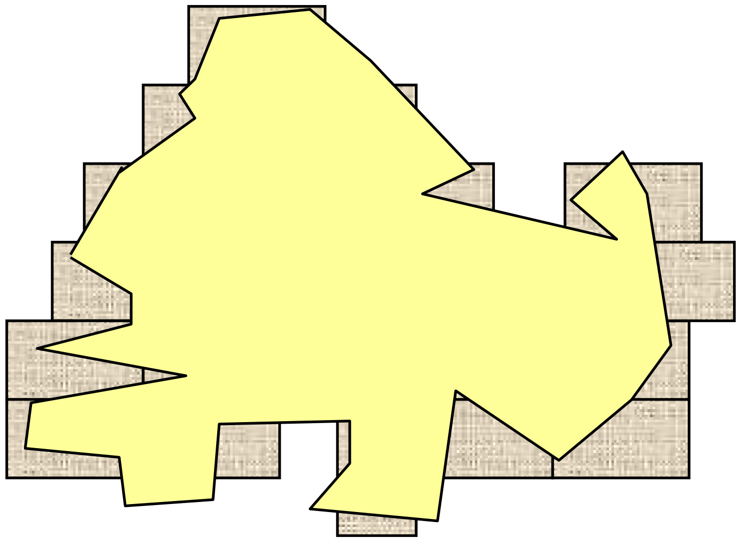


Πραγματικότητα



Μοντέλο

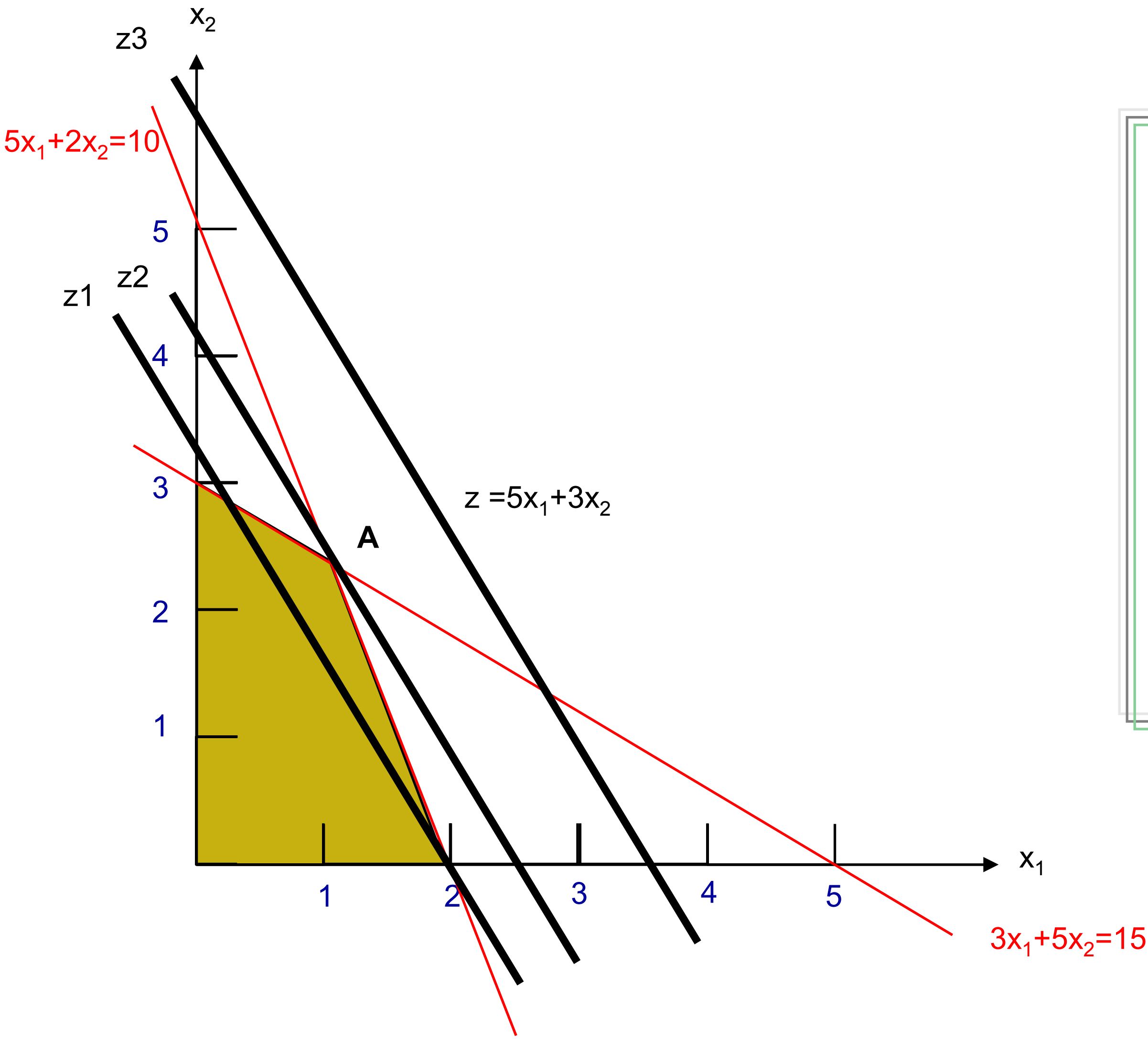
Κάποιος θα πρέπει να έχει επίγνωση των προσεγγίσεων και υποθέσεων που πραγματοποιεί σε ένα πρόβλημα ΓΠ...



Σύγκριση

Σπάνια ικανοποιούνται όλες οι προϋποθέσεις...

Τυπική Περίπτωση Μεγιστοποιήσεως



$$\max z = 5x_1 + 3x_2$$

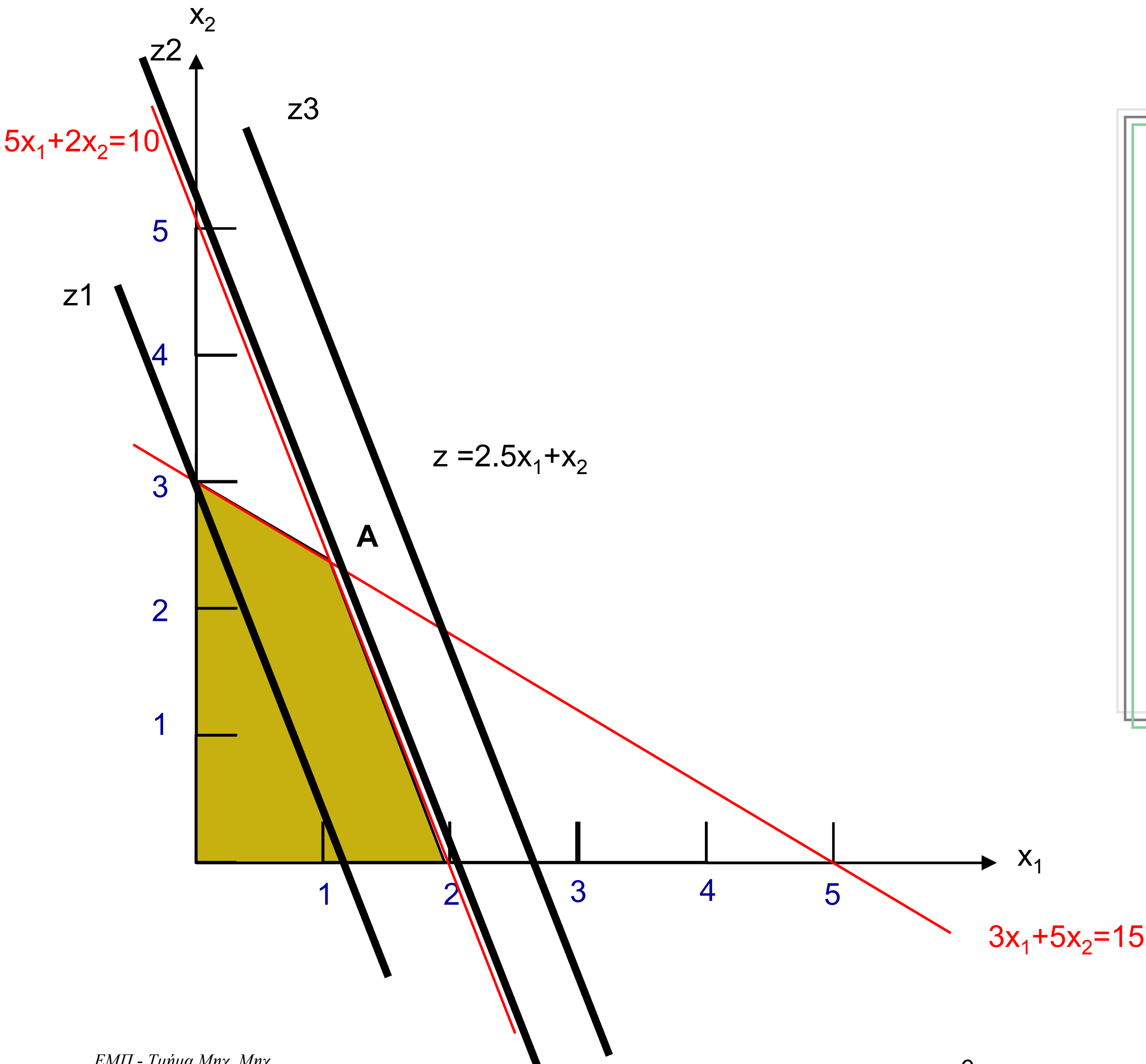
$$3x_1 + 5x_2 <= 15$$

$$5x_1 + 2x_2 <= 10$$

$$x_1 >= 0$$

$$x_2 >= 0$$

Άπειρες Εναλλακτικές Βέλτιστες Λύσεις



$$\max z = 2.5x_1 + x_2$$

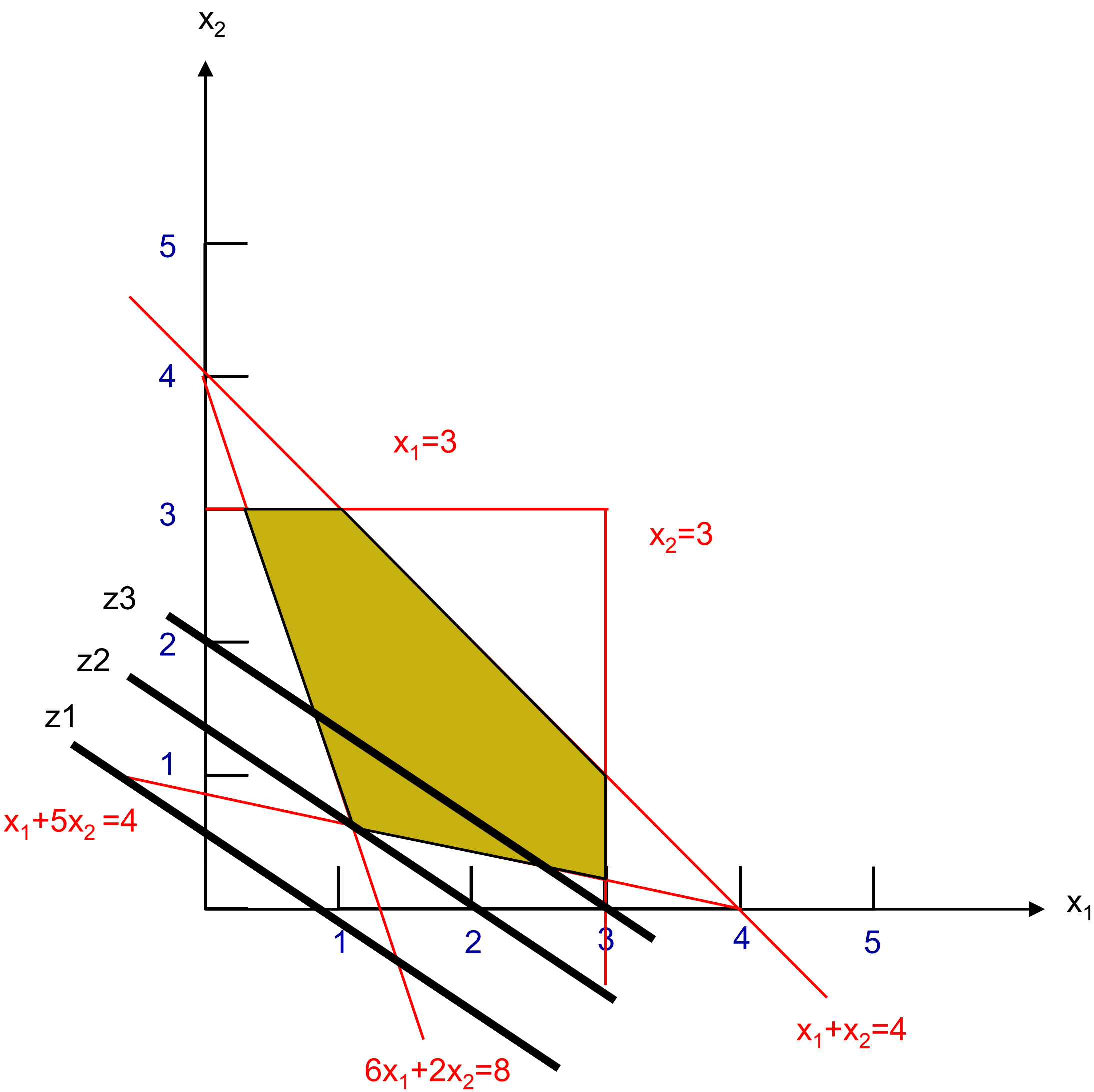
$$3x_1 + 5x_2 <= 15$$

$$5x_1 + 2x_2 <= 10$$

$$x_1 >= 0$$

$$x_2 >= 0$$

Τυπική Περίπτωση Ελαχιστοποιήσεως



$$\min z = 2x_1 + 3x_2$$

$x_1 + x_2 <=4$

$6x_1 + 2x_2 >=8$

$x_1 + 5x_2 >=4$

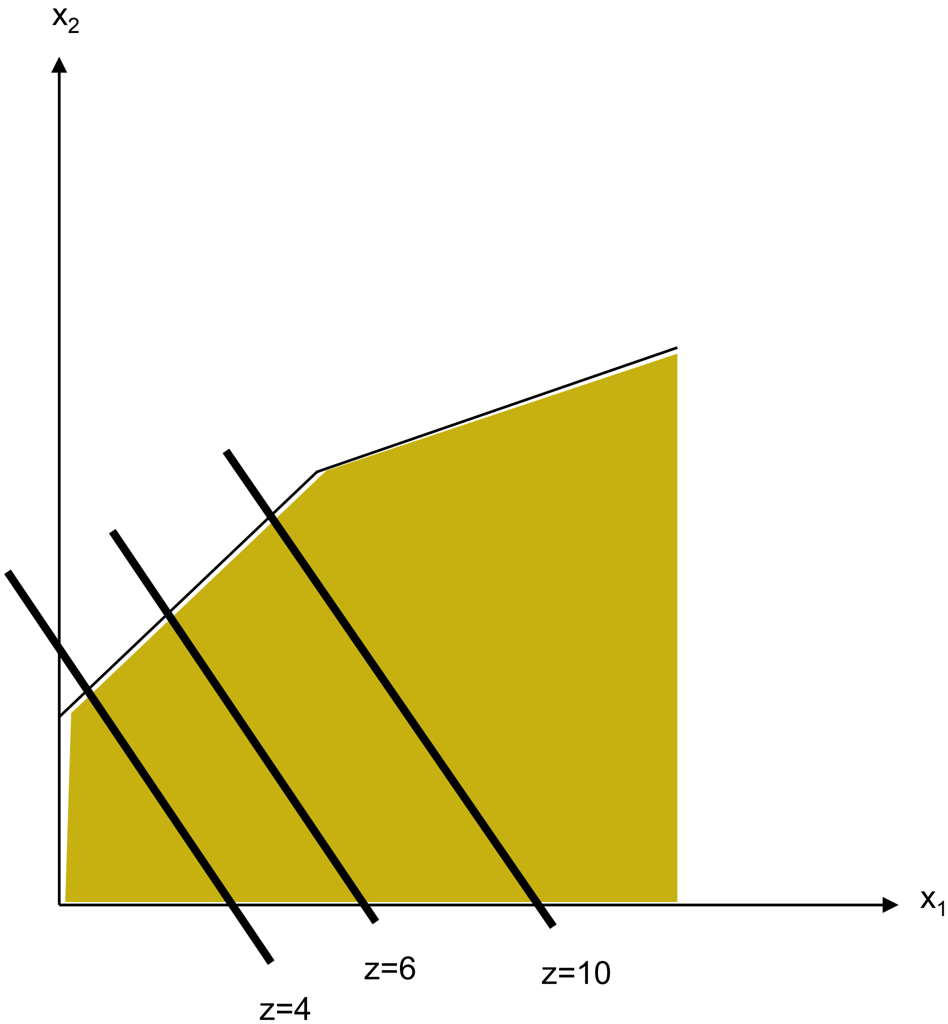
$x_1 <=3$

$x_2 <=3$

$x_1 >=0$

$x_2 >=0$

Μη Πεπερασμένη Λύση



$$\max z = 2x_1 + 2x_2$$

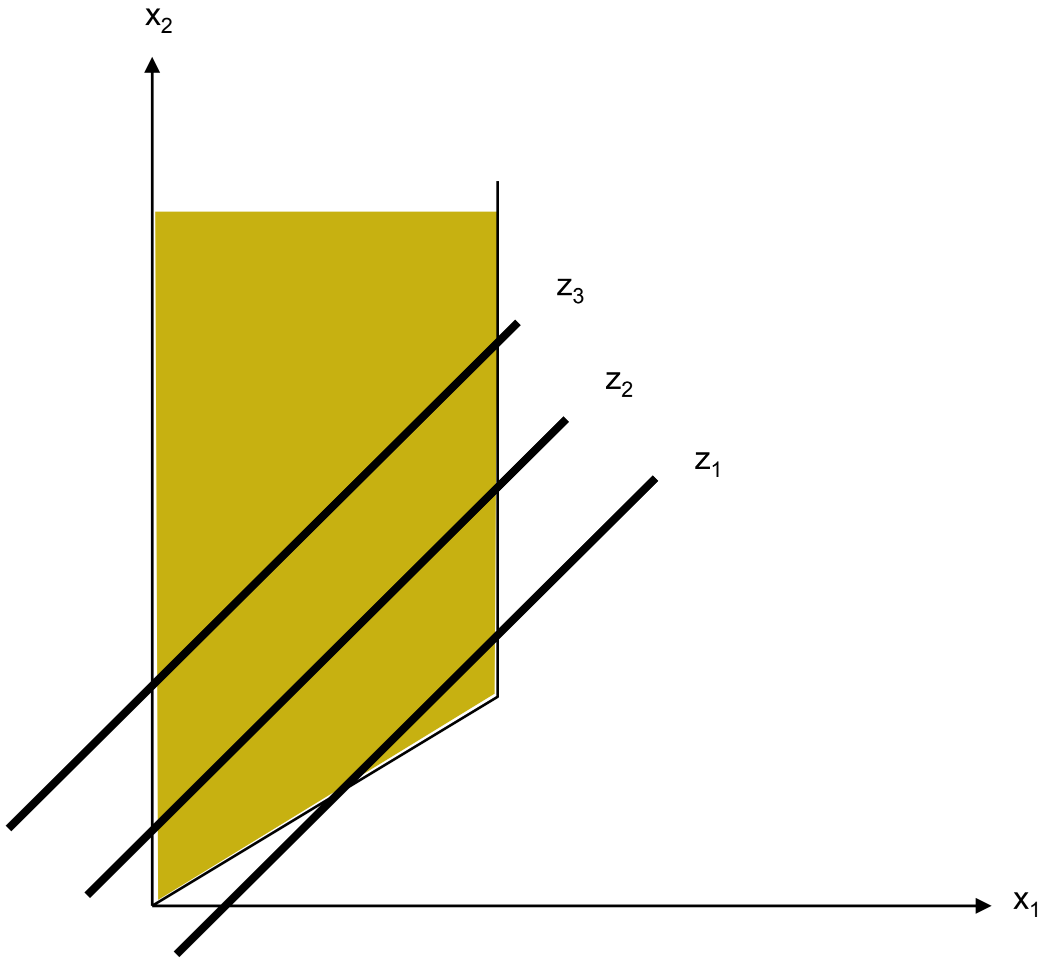
$x_1 - x_2 >= -1$

$-0.5x_1 + x_2 <= 2$

$x_1 >= 0$

$x_2 >= 0$

Μη Πεπερασμένη Λύση με Πεπερασμένες Βέλτιστες Τιμές Ορισμένων Μεταβλητών



$$\max z = -3x_1 + 2x_2$$

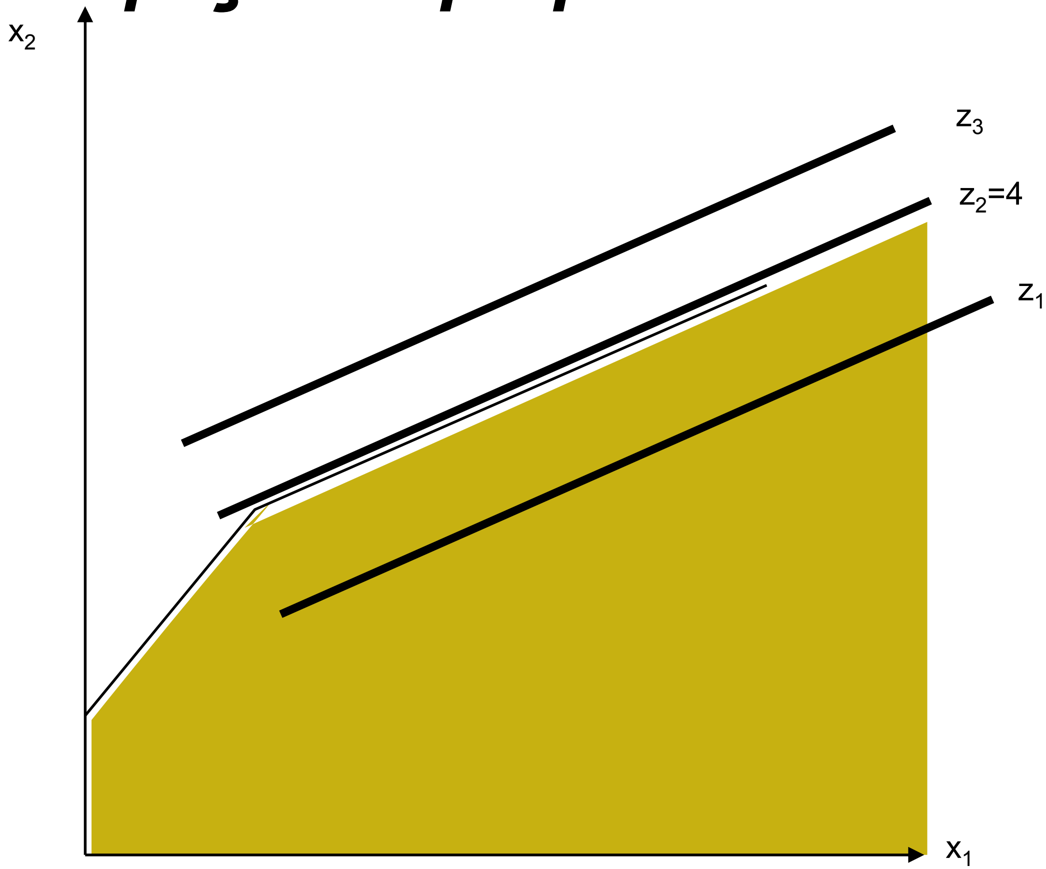
$x_1 <= 3$

$x_1 - x_2 <= 0$

$x_1 >= 0$

$x_2 >= 0$

Πεπερασμένη Βέλτιστη Τιμή Αντικειμενικής Συνάρτησης με Μη Πεπερασμένες Τιμές Μεταβλητών



$\max z = -x_1 + 2x_2$

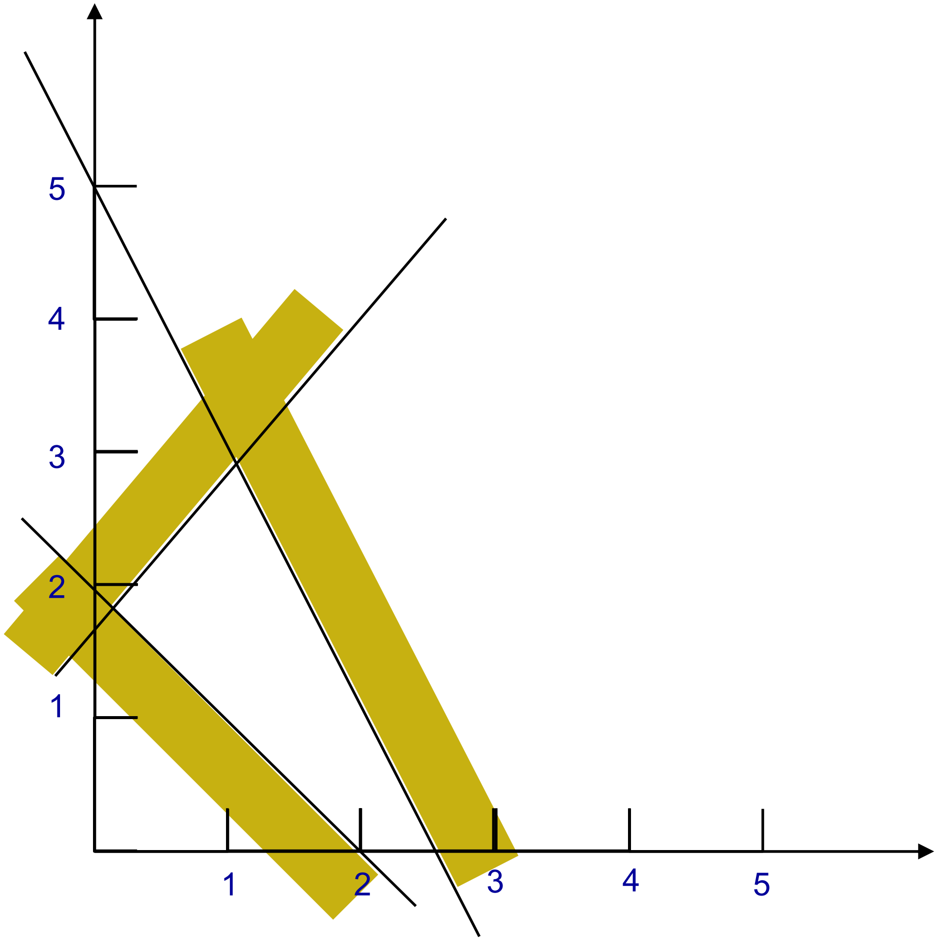
$x_1 - x_2 >= -1$

$-0.5x_1 + x_2 <= 2$

$x_1 >= 0$

$x_2 >= 0$

Καμία Λύση - Ασυμβίβαστοι Περιορισμοί



$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$2x_1 + x_2 >= 10$

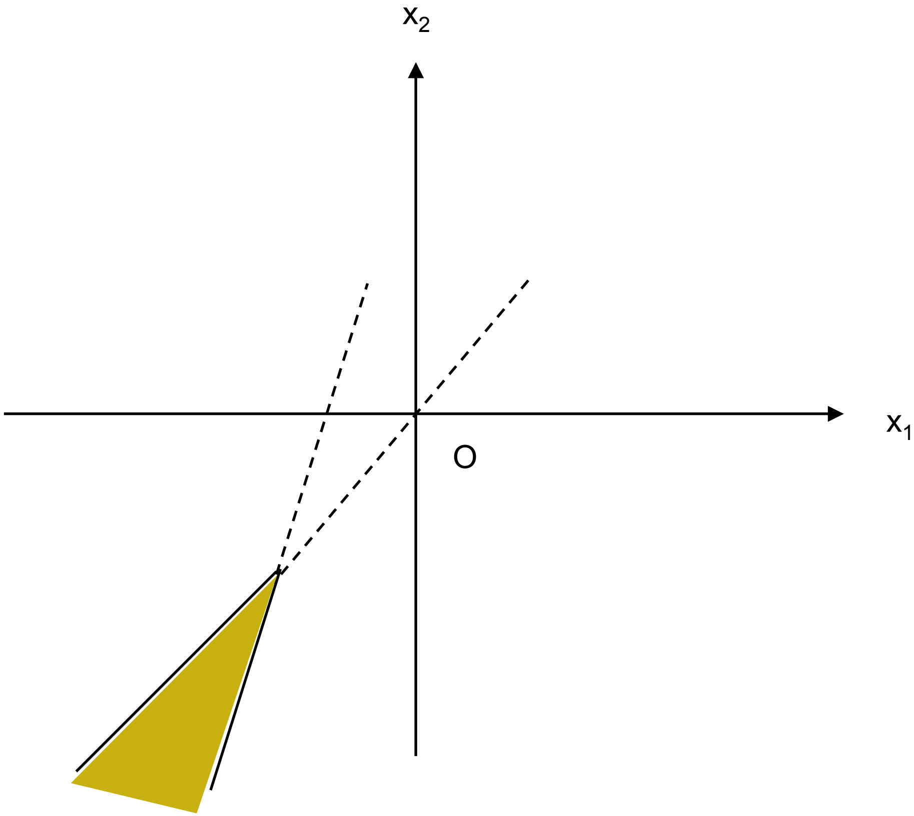
$x_1 + x_2 <= 4$

$-3x_1 + 2x_2 >= 6$

$x_1 >= 0$

$x_2 >= 0$

Καμία Βέλτιστη Δυνατή Λύση



$$\max z = x_1 + x_2$$

$$x_1 - x_2 >= 0$$

$$3x_1 - x_2 <= -3$$

$$x_1 >= 0$$

$$x_2 >= 0$$

Πρότυπη Μορφή Μαθηματικού Μοντέλου του Γενικού Προβλήματος ΓΠ

- Όλες οι ανισοϊσότητες θα πρέπει να γίνουν εξισώσεις για να επιλυθεί το πρόβλημα του ΓΠ
- Τους περιορισμούς της μορφής <= τους μετατρέπουμε σε ισότητες με την εισαγωγή μεταβλητών χαλαρότητας
- Τους περιορισμούς της μορφής >= τους μετατρέπουμε σε ισότητες με την εισαγωγή μεταβλητών περίσσειας
- Γενικότερα, οι μεταβλητέ που εισάγονται για να μετατραπούν οι ανισοϊσότητες σε ισότητες ονομάζονται μεταβλητές αποκλίσεως (ή βοηθητικές ή ουδέτερες)

Ορισμένα Μαθηματικά… (1/2)

Πρώτη κατηγορία περιορισμών

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_{hj}\, x_j <= b_h$$

$$x_{r+h} = b_h - \Sigma\, \alpha_{hj}\, x_j >= 0$$

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_{hj}\, x_j + x_{r+h} = b_h$$

Δεύτερη κατηγορία περιορισμών

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_{kj}\, x_j >= b_h$$

$$x_{r+k} = \Sigma\, \alpha_{kj}\, x_j - b_k >= 0$$

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_{kj}\, x_j - x_{r+k} = b_k$$

Σταδιακά επιτυγχάνουμε την μετατροπή όλων των αρχικών περιορισμών στο ακόλουθο σύστημα γραμμικών εξισώσεων

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_{hj}\, x_j + x_{r+h} = b_h \qquad h = 1, 2, \ldots, u$$

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_{kj}\, x_j - x_{r+k} = b_k \qquad k = u+1, u+2, \ldots, v$$

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_{\rho j}\, x_j = b_\rho \qquad \rho = v+1, v+2, \ldots, m$$

Ορισμένα Μαθηματικά… (2/2)

Τελικώς, καταλήγουμε στην μήτρα mxn που φαίνεται παρακάτω:

$$
\mathbf{A} = \begin{array}{ccccccccccc}
\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1r} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{1r} & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & & & & & & & & & & \\
\alpha_{u1} & \alpha_{u2} & \dots & \alpha_{ur} & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\
\alpha_{u+1,\,1} & \alpha_{u+1,2} & \dots & \alpha_{u+1,r} & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 \\
\dots & & & & & & & & & & \\
\alpha_{v1} & \alpha_{v2} & \dots & \alpha_{vr} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 \\
\alpha_{v+1,1} & \alpha_{v+1,2} & \dots & \alpha_{v+1,r} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & & & & & & & & & & \\
\alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mr} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0
\end{array}
$$

Τελικώς...

- Επειδή οι εισαγόμενες μεταβλητές αποκλίσεως έχουν μοναδιαίες αξίες μηδενικές, λέμε ότι οι αντίστοιχες δραστηριότητες είναι ουδέτερες
- Το πρόβλημα που προκύπτει με τους περιορισμούς των εξισώσεων έχει το ίδιο σύνολο βέλτιστων λύσεων με το αρχικό
- Η φυσική ερμηνεία των μεταβλητών αποκλίσεως είναι ότι παριστάνουν το μέρος του διαθεσίμου μέσου που μένει αχρησιμοποίητο

Παράδειγμα Πρότυπης Μορφής Μαθηματικού Μοντέλου του Γενικού Προβλήματος ΓΠ

$$\text{Max } \{4x_1 + 3x_2\}$$

υποκείμενο στους παρακάτω περιορισμούς:

$$2x_1 + 3x_2 <= 6$$
$$x_1 + 7x_2 >= 4$$
$$x_1 + x_2 = 3$$

$$x_1, x_2 > 0$$

$z = 4x_1 + 3x_2 = c\,x$

$c = (4, 3, 0, 0)$

Με μεταβλητές απόκλισης

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$$
$$x_1 + 7x_2 - x_4 = 4$$
$$x_1 + x_2 = 3$$

$$x_1, x_2 > 0$$

Μητρική μορφή

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$

$b = [6, 4, 3]$

$\alpha_1 = [2, 1, 1]$

$\alpha_2 = [3, 7, 1]$

$\alpha_3 = [1, 0, 0]$

$\alpha_4 = [0, -1, 0]$

Βασικά θέματα για συζήτηση

Για την επιτυχημένη εφαρμογή του Γραμμικού Προγραμματισμού θα πρέπει να ισχύουν συγκεκριμένες προϋποθέσεις (αναλογικότητα, προσθετικότητα, διαιρετότητα, προσδιορισμένοι συντελεστές). Είναι κατανοητό ότι αυτές οι προϋποθέσεις περιορίζουν γενικά το φάσμα δυνατοτήτων εφαρμογής του Γραμμικού Προγραμματισμού.

Η γραφική λύση απλών περιπτώσεων (με 2 μεταβλητές) είναι χρήσιμη διοτί επεξηγεί τον τρόπο με τον οποίο εργάζεται η αλγεβρική μέθοδος επίλυσης προβλημάτων οποιουδήποτε αριθμού μεταβλητών.

Για κάθε πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού υπάρχει μια πρότυπη μορφή του αντίστοιχου μαθηματικού μοντέλου που βοηθά την τυποποιημένη επίλυσή του.

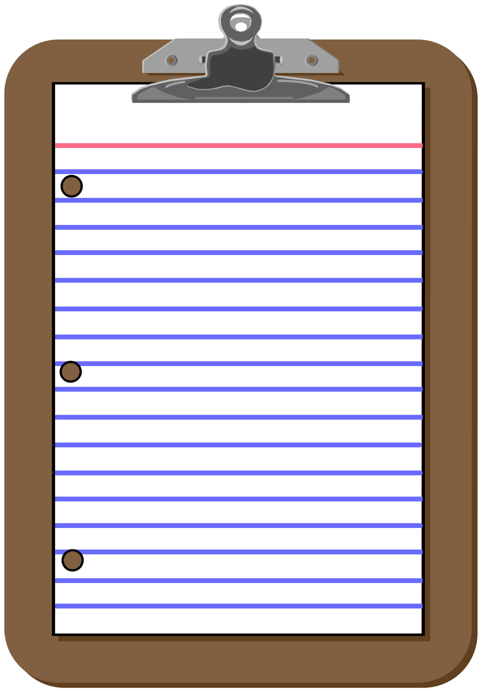
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Επιχειρησιακή Έρευνα

Γραμμικός Προγραμματισμός
Μέθοδος Simplex

Η παρουσίαση προετοιμάστηκε από τον Ν.Α. Παναγιώτου

Περιεχόμενα Παρουσίασης



1. **Βασικά Θεωρήματα**
2. **Χρήσιμοι Ορισμοί**
3. **Πινακοποίηση Μεθόδου**
4. **Παραδείγματα**

Ορισμένα Μαθηματικά… (1/2)

Πρώτη κατηγορία περιορισμών

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_{hj}\, x_j <= b_h$$

$$x_{r+h} = b_h - \Sigma\, \alpha_{hj}\, x_j >= 0$$

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_{hj}\, x_j + x_{r+h} = b_h$$

Δεύτερη κατηγορία περιορισμών

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_{kj}\, x_j >= b_h$$

$$x_{r+k} = \Sigma\, \alpha_{kj}\, x_j - b_k >= 0$$

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_{kj}\, x_j - x_{r+k} = b_k$$

Σταδιακά επιτυγχάνουμε την μετατροπή όλων των αρχικών περιορισμών στο ακόλουθο σύστημα γραμμικών εξισώσεων

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_{hj}\, x_j + x_{r+h} = b_h \qquad h = 1, 2, \ldots, u$$

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_{kj}\, x_j - x_{r+k} = b_k \qquad k = u+1, u+2, \ldots, v$$

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_{\rho j}\, x_j = b_\rho \qquad \rho = v+1, v+2, \ldots, m$$

Ορισμένα Μαθηματικά… (2/2)

Τελικώς, καταλήγουμε στην μήτρα mxn που φαίνεται παρακάτω:

$$
\mathbf{A} = \begin{array}{cccccccccc}
\alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1r} & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{1r} & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\ldots & & & & & & & & & & \\
\alpha_{u1} & \alpha_{u2} & \ldots & \alpha_{ur} & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\
\alpha_{u+1,\,1} & \alpha_{u+1,2} & \ldots & \alpha_{u+1,r} & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & \ldots & 0 \\
\ldots & & & & & & & & & & \\
\alpha_{v1} & \alpha_{v2} & \ldots & \alpha_{vr} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & -1 \\
\alpha_{v+1,1} & \alpha_{v+1,2} & \ldots & \alpha_{v+1,r} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\ldots & & & & & & & & & & \\
\alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mr} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0
\end{array}
$$

Τελικώς...

- Επειδή οι εισαγόμενες μεταβλητές αποκλίσεως έχουν μοναδιαίες αξίες μηδενικές, λέμε ότι οι αντίστοιχες δραστηριότητες είναι ουδέτερες
- Το πρόβλημα που προκύπτει με τους περιορισμούς των εξισώσεων έχει το ίδιο σύνολο βέλτιστων λύσεων με το αρχικό
- Η φυσική ερμηνεία των μεταβλητών αποκλίσεως είναι ότι παριστάνουν το μέρος του διαθεσίμου μέσου που μένει αχρησιμοποίητο

Παράδειγμα Πρότυπης Μορφής Μαθηματικού Μοντέλου του Γενικού Προβλήματος ΓΠ

$\text{Max}\ \{4x_1 + 3x_2\}$

υποκείμενο στους παρακάτω περιορισμούς:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\le 6 \\ x_1 + 7x_2 &\ge 4 \\ x_1 + x_2 &= 3 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 > 0$$

$z = 4x_1 + 3x_2 = c\,x$

$c = (4, 3, 0, 0)$

Με μεταβλητές απόκλισης

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + 7x_2 - x_4 &= 4 \\ x_1 + x_2 &= 3 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 > 0$$

Μητρική μορφή

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$

$b = [6, 4, 3]$

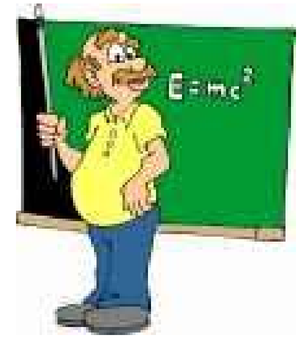
$\alpha_1 = [2, 1, 1]$

$\alpha_2 = [3, 7, 1]$

$\alpha_3 = [1, 0, 0]$

$\alpha_4 = [0, -1, 0]$

Προκαταρκτικά Θεωρίας Μεθόδου Simplex



$$\max \text{ (ή min) } z = cx$$
$$Ax = b \ (b>=0)$$
$$x>=0$$

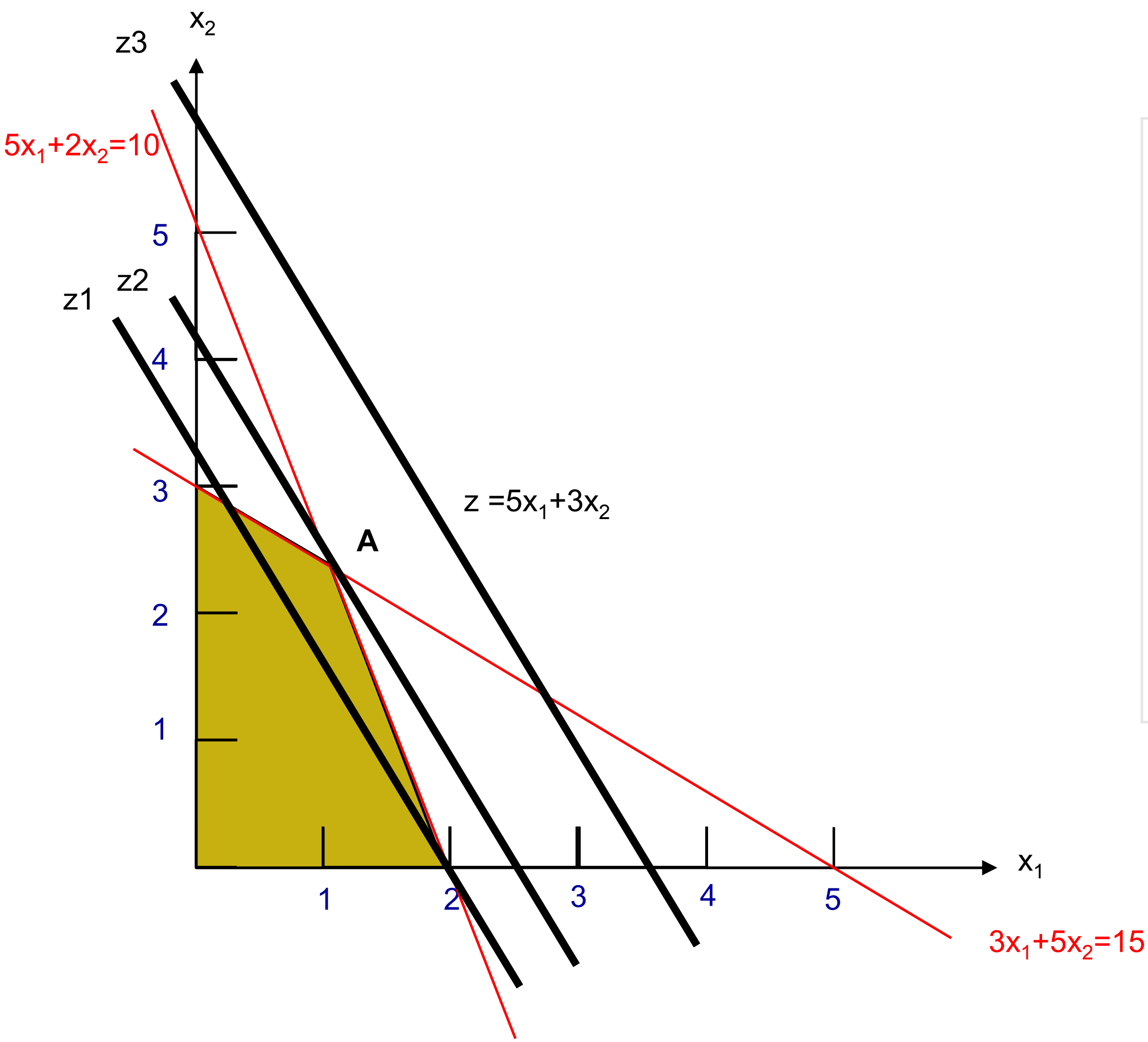
Μοντέλο Γενικού Προβλήματος

Λύση: Κάθε λύση του Ax = b, δηλαδή κάθε διάνυσμα x = [x_1, x_2, x_3,... X_n] που ικανοποιεί το σύστημα αυτό

Εφικτή Λύση: Κάθε λύση του Ax = b που ικανοποιεί τους περιορισμούς (x>=0)

Βέλτιστη Δυνατή Λύση: Η εφικτή λύση που βελτιστοποιεί τη z

Τυπική Περίπτωση Μεγιστοποιήσεως



$$\max z = 5x_1 + 3x_2$$

$$3x_1 + 5x_2 <= 15$$

$$5x_1 + 2x_2 <= 10$$

$$x_1 >= 0$$

$$x_2 >= 0$$

Λύσεις Προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού

- Για να έχει μία τουλάχιστον λύση η Ax=b, θα πρέπει ο βαθμός της μήτρας A να ισούται με το βαθμό της επαυξημένης μήτρας Ab (στήλες της A και στήλη b)
- Με άλλα λόγια, ο αριθμός των ανεξάρτητων εξισώσεων m θα πρέπει να είναι μικρότερος ή ίσος με τον αριθμό των μεταβλητών n

Εάν $m=n$, υπάρχει μόνο μία λύση

Εάν $m<n$, υπάρχουν άπειρες λύσεις

Εάν $m>n$, δεν υπάρχει λύση

Βάση Συστήματος Γραμμικών Αλγεβρικών Εξισώσεων

- Βάση B είναι η τετραγωνική μήτρα mxm που προκύπτει από την A και έχει m γραμμικά ανεξάρτητες στήλες
- Βασικές μεταβλητές (ή εξαρτημένες) ονομάζονται οι μεταβλητές που αντιστοιχούν στις στήλες μιας βάσεως B
- Μη βασικές μεταβλητές (ή ανεξάρτητες) είναι οι n-m μεταβλητές που δεν είναι βασικές

Βάση Συστήματος Γραμμικών Αλγεβρικών Εξισώσεων

- B = (α1, α2,... αm) η βασική μήτρα της A
- $\tilde{A}$ = (αm+1, αm+2,... αn) η υπομήτρα mx(n-m) των μη βασικών διανυσμάτων
- xB=[x1, x2,... xm] το διάνυσμα στήλης των βασικών μεταβλητών
- $\tilde{x}$=[xm+1, xm+2,... xn] το διάνυσμα στήλης των μη βασικών μεταβλητών

$$A\,x = b \text{ ή } [B, \tilde{A}]\,[\quad] = b \text{ ή}$$

$$B\,x_B + \tilde{A}\,\tilde{x} = b \text{ ή}$$

$$B^{-1} B\,x_B + B^{-1} \tilde{A}\,\tilde{x} = B^{-1} b \text{ ή } x_B = B^{-1} b - B^{-1} \tilde{A}\,\tilde{x}$$

Βάση Συστήματος Γραμμικών Αλγεβρικών Εξισώσεων

- Η σχέση $x_B = B^{-1}b - B^{-1} \tilde{A} x$ υποδηλώνει ότι λύση μπορεί να βρεθεί εάν εκλεγούν (n-m) αυθαίρετες τιμές για τα στοιχεία του x και μετά προσδιορισθούν από αυτές τα στοιχεία του x_B. Γι' αυτό το λόγο τα στοιχεία του διανύσματος x καλούνται και ανεξάρτητες μεταβλητές, του δε x_B εξαρτημένες
- Βασική (δυνατή) λύση ενός συστήματος γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων ως προς μια βάση B καλείται μία λύση που έχει το πολύ όλες τις βασικές μεταβλητές ως προς τη βάση αυτή διάφορες του μηδενός και όλες τις μη βασικές ίσες με το μηδέν
- Εκφυλισμένη βασική (δυνατή) λύση καλείται μία βασική όπου μία ή περισσότερες βασικές μεταβλητές είναι μηδενικές

Βασικά Θεωρήματα (1/2)

- Θεώρημα 1: Ο αριθμός των βασικών δυνατών λύσεων ενός συστήματος γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων είναι πεπερασμένος
- Θεώρημα 2: Το σύνολο των δυνατών λύσεων προβλήματος ΓΠ είναι κυρτό κλειστό σύνολο
- Θεώρημα 3: Κάθε βασική δυνατή λύση του προβλήματος ΓΠ είναι ένα ακραίο σημείο του κυρτού συνόλου (κορυφή του πολυέδρου) των δυνατών λύσεων, και κάθε ακραίο σημείο του κυρτού συνόλου είναι μια βασική δυνατή λύση του συστήματος των περιορισμών

Βασικά Θεωρήματα (2/2)

- Θεώρημα 4: Αν υπάρχει μία δυνατή λύση του προβλήματος ΓΠ, υπάρχει και μία βασική δυνατή λύση αυτού
- Θεώρημα 5: Αν υπάρχει μια βέλτιστη δυνατή λύση του προβλήματος ΓΠ, τότε η αντικειμενική συνάρτηση λαμβάνει τη βέλτιστη τιμή της σε ένα τουλάχιστον ακραίο σημείο του κυρτού συνόλου των δυνατών λύσεων, δηλαδή σε μια βασική δυνατή λύση
- Πόρισμα: Αν υπάρχει τουλάχιστον μία βέλτιστη δυνατή λύση που δεν είναι βασική, τότε υπάρχουν άπειρες βέλτιστες δυνατές λύσεις

Παράδειγμα (1/3)

$$2X_1 + 3X_2 <= 6$$
$$X_1 + 7X_2 >= 4$$
$$X_1 + X_2 = 3$$
$$\text{όπου, } X_1 >= 0,\ X_2 >= 0$$

$$2X_1 + 3X_2 + X_3 = 6$$
$$X_1 + 7X_2 - X_4 = 4$$

X_3, X_4 =μεταβλητές αποκλίσεως

$$X_1 + X_2 = 3$$
$$\text{όπου, } X_1 >= 0,\ X_2 >= 0,\ X_3 >= 0,\ X_4 >= 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα (2/3)

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$$

$$X = [X_1, X_2, X_3, X_4]$$

$$b = [6, 4, 3]$$

$\alpha_1 = [2, 1, 1]$ $\alpha_2 = [3, 7, 1]$

$\alpha_3 = [1, 0, 0]$ $\alpha_4 = [0, -1, 0]$

Παράδειγμα (3/3)

Η αντικειμενική συνάρτηση γράφεται:

$$Z = 4X_1+3X_2 = C\,X = 4X_1+3X_2 + 0X_3 + 0X_4$$

$$C = (4, 3, 0, 0)$$

ή

$$Z = (C_1, C_2, C_3, C_4)\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}$$

Γραμμική Ανεξαρτησία Διανυσμάτων

- Ένα σύνολο διανυσμάτων α1, α2,... αm του χώρου En είναι γραμμικώς εξαρτημένα εάν υπάρχουν αριθμοί (βαθμωτά μεγέθη) λi όχι όλοι 0 ώστε: λ1α1+ λ2α2 +…+ λmαm = 0
- Εάν οι μόνες τιμές των λi για τις οποίες η προηγούμενη εξίσωση ισχύει είναι λ1 = λ2 =…= λm = 0 τότε τα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα
- Εάν κάποια διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αυτό σημαίνει ότι καθένα από αυτά δεν εκφράζεται συναρτήσει των άλλων
- Ένα διάνυσμα α θα λέμε ότι είναι γραμμικός συνδυασμός των α1, α2,…, αm όταν α = λ1α1+ λ2α2 +…+ λmαm όχι όλα μηδέν

Βαθμός Μήτρας

- Βαθμός στηλών μιας mxn μήτρας Α είναι ο μέγιστος αριθμός γραμμικώς ανεξάρτητων στηλών της Α
- Αντίστοιχα, βαθμός σειρών μιας mxn μήτρας Α είναι ο μέγιστος αριθμός γραμμικώς ανεξάρτητων σειρών της Α
- Ορισμένες βασικές προτάσεις:
  - Ο μέγιστος αριθμός γραμμικώς ανεξαρτήτων στηλών ισούται με τον μέγιστο αριθμό γραμμικώς ανεξαρτήτων σειρών, ή αλλιώς, ο βαθμός στηλών μιας μήτρας ισούται με τον βαθμό σειρών της
  - Ο βαθμός της Α είναι k εάν και μόνον εάν κάθε ορίζουσα τάξεως k+1 που προκύπτει από την Α ισούται με το 0, ενώ υπάρχει τουλάχιστον μία υποορίζουσα τάξεως k, η οποία είναι διάφορη του 0

Παράδειγμα Βαθμού Μήτρας

Έστω η μήτρα A όπου:

$$\begin{matrix} 4 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \\ 1 & 4 & 4 \end{matrix}$$

Ο βαθμός της μήτρας A είναι 2 γιατί A = 0, ενώ υπάρχουν πολλές ελάσσονες υποορίζουσες δευτέρας τάξεως, οι οποίες είναι διάφορες του μηδενός

Ερωτήσεις...


Statistics show...
A + B=C
Bioeconomics
Today's News
Picasso's blue period
$ $ $ $ $
E=MC^2
The sum of the parts
©R. Morley Inc.