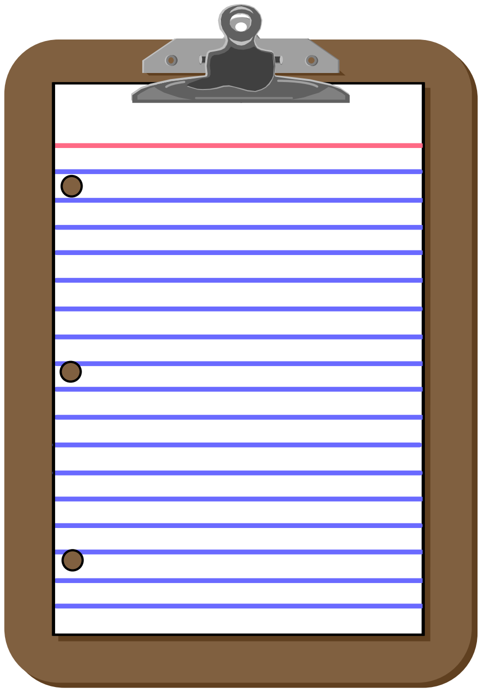
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Επιχειρησιακή Έρευνα

Γραμμικός Προγραμματισμός
Μέθοδος Simplex

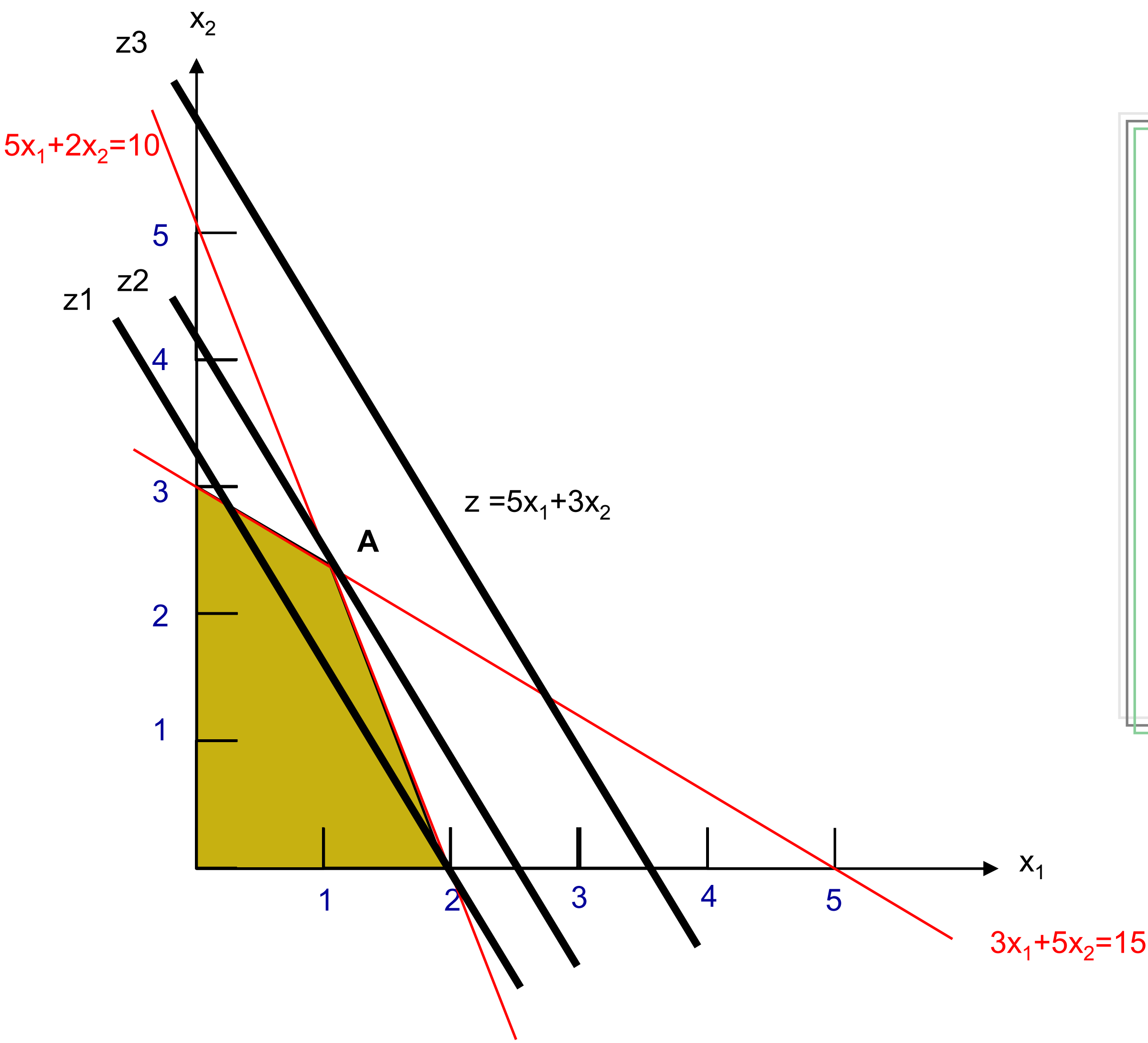
Η παρουσίαση προετοιμάστηκε από τον Ν.Α. Παναγιώτου

Περιεχόμενα Παρουσίασης



1. **Πινακοποίηση Μεθόδου**
2. **Ερμηνεία Βασικών Μεγεθών**
3. **Παραδείγματα**

Τυπική Περίπτωση Μεγιστοποιήσεως



$$\max z = 5x_1 + 3x_2$$

$$3x_1 + 5x_2 <= 15$$

$$5x_1 + 2x_2 <= 10$$

$$x_1 >= 0$$

$$x_2 >= 0$$

Ένα Παράδειγμα...

$$\max z = 524\,x_1 + 730\,x_2 + 834\,x_3 + 418\,x_4$$

...με τους παρακάτω περιορισμούς:

$$\begin{aligned}
1.5\,x_1 + x_2 + 2.4\,x_3 + x_4 &\le 2000\\
x_1 + 5x_2 + x_3 + 3.5x_4 &\le 8000\\
1.5\,x_1 + 3x_2 + 3.5x_3 + x_4 &\le 5000
\end{aligned}$$

...και που στην πρότυπη μορφή γίνεται:

$$\begin{aligned}
1.5\,x_1 + x_2 + 2.4\,x_3 + x_4 + x_5 &= 2000\\
x_1 + 5x_2 + x_3 + 3.5x_4 + x_6 &= 8000\\
1.5\,x_1 + 3x_2 + 3.5x_3 + x_4 + x_7 &= 5000
\end{aligned}$$

...Συνέχεια του Παραδείγματος...

α_1= [1.5, 1, 1.5]

α_2= [1, 5, 3]

α_3= [2.4, 1, 3.5]

α_4= [1, 3.5, 1]

α_5= [1, 0, 0]

α_6= [0, 1, 0]

α_7= [0, 0, 1]

b = [2000, 8000, 5000]

στήλες

Μια βασική λύση του συστήματος είναι η x_1, x_2, x_6 <> 0 και $x_3 = x_4 = x_5 = x_7 = 0$, αφού:

$$\begin{bmatrix} 1.5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1.5 & 3 & 0 \end{bmatrix} <> 0$$

...Συνέχεια του Παραδείγματος...

$$B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_6) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{bmatrix} 1.5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1.5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

όπου $\beta_1=\alpha_1$, $\beta_2=\alpha_2$, $\beta_3=\alpha_6$

Εάν εφαρμόσουμε τον τύπο $x_B = B^{-1} b$ ή επιλύσουμε το παρακάτω σύστημα...

$$\begin{aligned} 1.5x_1 + x_2 + 2.4x_3 + x_4 + x_5 &= 2000 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 3.5x_4 + x_6 &= 8000 \\ 1.5x_1 + 3x_2 + 3.5x_3 + x_4 + x_7 &= 5000 \end{aligned}$$

λαμβάνουμε τη βασική λύση (η οποία κατά σύμπτωση είναι και δυνατή):
$x_{B1} = x_1 = 1000/3$, $x_{B2} = x_2 = 1500$, $x_{B3} = x_6 = 500/3$ και $x_3 = x_4 = x_5 = x_7 = 0$.

...Συνέχεια του Παραδείγματος...

Δεδομένου ότι από πριν...

$$\max z = 524\ x_1 + 730\ x_2 + 834\ x_3 + 418\ x_4$$

$$\mathbf{x_{B1} = x_1 = 1000/3,\ x_{B2} = x_2 = 1500,\ x_{B3} = x_6 = 500/3}$$

...η αντίστοιχη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι...

$$Z^0 = C_B\ X_B = c_{B1}\ x_{B1} + c_{B2}\ x_{B2} + c_{B3}\ x_{B3} \text{ ή}$$

$$Z^0 = C_B\ X_B = 524 \times 1000/3 + 730 \times 1500 = 1{,}269{,}000$$

…Άρα, Μέχρι Στιγμής Έχουμε...

$x_{B1} = x_1 = 1000/3$ παραγόμενες μονάδες προϊόντος 1

$x_{B2} = x_2 = 1500$ παραγόμενες μονάδες προϊόντος 2

$x_{B3} = x_6 = 500/3$ ώρες αργίας μηχανών τύπου Β

$x_3 = 0$ παραγόμενες μονάδες προϊόντος 3

$x_4 = 0$ παραγόμενες μονάδες προϊόντος 4

$x_5 = 0$ ώρες αργίας μηχανών τύπου Α

$x_7 = 0$ ώρες αργίας μηχανών τύπου Γ

…και το εβδομαδιαίο κέρδος που συνεπάγεται η βασική αυτή λύση είναι...

$$Z^0 = C_B\, X_B = 1{,}269{,}000$$

Τώρα Μεταβάλουμε τη Στάθμη Μίας Μη Βασικής Μεταβλητής...

- Υποθέτουμε ότι η στάθμη της δραστηριότητας $α_3$ αυξάνεται κατά μία μονάδα
- Αυτό σημαίνει ότι τώρα θα παράγεται μία μονάδα του προϊόντος 3 ενώ πριν δεν παραγόταν καμία
- Θα πρέπει να μεταβληθούν κατάλληλα οι στάθμες των βασικών μεταβλητών ώστε να συνεχίσουν να ικανοποιούνται οι περιορισμοί του προβλήματος

Επομένως...

Κάθε στήλη της Α που δεν ανήκει στη Βάση μπορεί να εκφρασθεί σαν γραμμικός συνδυασμός των στηλών της Β

Εάν:

y_{13} η μείωση της στάθμης της βασικής δραστηριότητας 1

y_{23} η μείωση της στάθμης της βασικής δραστηριότητας 2

y_{33} η μείωση της στάθμης της βασικής δραστηριότητας 3

...τότε θα πρέπει...

$$1\,\alpha_3 = y_{13}\,\beta_1 + y_{23}\,\beta_2 + y_{33}\,\beta_3$$

$$\alpha_j = B\ y_j$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο $y_j = B^{-1}\,a_j$ και επιλύοντας το παρακάτω σύστημα...

$$\begin{aligned} 1.5\,y_{13} + y_{23} + 0\,y_{33} &= 2.4 \\ 1\,y_{13} + 5\,y_{23} + 1\,y_{33} &= 1 \\ 1.5\,y_{13} + 3\,y_{23} + 0\,y_{33} &= 3.5 \end{aligned}$$

ή

$y_{13} = 1.23$ μείωση παραγωγής 1

$y_{23} = 0.55$ μείωση παραγωγής 2

$y_{33} = -2.98$ αύξηση ωρών αργίας μηχ. Β

…και το Οριακό Καθαρό Εισόδημα...

...απαντά στο ερώτημα: ποιο το οικονομικό αποτέλεσμα της αυξήσεως στάθμης της μη βασικής δραστηριότητας 3 κατά μία μονάδα;

- **Θα αυξηθεί η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης (κατά c_3) αφού αυξάνεται η τιμή της μεταβλητής x_3**
- **Θα μειωθεί η τιμή της z^0 αφού οι βασικές μεταβλητές μειώνονται κατά y_{13}, y_{23} και y_{33}**
- **Το τελικό αποτέλεσμα στο Οριακό Καθαρό Εισόδημα θα είναι:**

Εφαρμόζοντας τον τύπο $y_j = B_{-1}\, a_j$ και επιλύοντας το παρακάτω σύστημα...

$$c_3 - z_3 = c_3 - (c_1\, y_{13} + c_2\, y_{23} + c_6\, y_{33}) =$$

$$834 - (1.23 \times 524 + 0.55 \times 730 - 2.98 \times 0) = -212$$

- **Επομένως ορθά επιλέξαμε την x_3 ως μη βασική μετ.!**

Τύποι Οριακού Καθαρού Εισοδήματος Μη Βασική Δραστηριότητας

$\tilde{c}_j = c_j - z_j$, όπου:

$z_j = y_{1j}\, c_{B1} + y_{2j}\, c_{B2} + \ldots + y_{mj}\, c_{Bm} =$

$\sum_{i=1}^{m} y_{ij}\, c_{Bi} = c_B\, y_j =$

$(c_{B1}, c_{B2}, \ldots, c_{Bm}) \begin{bmatrix} Y_{1j} \\ y_{2j} \\ \ldots \\ y_{mj} \end{bmatrix}$

Προσδιορισμός Μίας Αρχικής Βασικής Δυνατής Λύσης (1/3)

Θεωρούμε ότι όλοι οι περιορισμοί είναι ανισότητες <= με b>=0

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{R} & \mathbf{I} \\ & \left[\begin{array}{ccc|ccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{1r} & 1 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{2r} & 0 & 1 & 0 \\ \cdots & & & & & \\ \cdots & & & & & \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{mr} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] & \end{array}$$

A = (R, I)

Επίσης, $X = [X_1, X_2, \ldots, X_r, X_{r+1}, X_{r+2}, \ldots, X_{r+m}]$ $\mathbf{[X_r, X_s]}$

$Z = C_B X_B, C_B = 0$

Προσδιορισμός Μίας Αρχικής Βασικής Δυνατής Λύσης (2/3)

Εάν $x_r = 0$, τότε $R\, x_r + I\, x_s = b$, ή $I\, x_s = b$ ή $x_s = b >= 0$

$y_j = B^{-1}\alpha_j = I\, \alpha_j = \alpha_j$

$c_B = (c_{B1}, c_{B2}, \ldots, c_{Bm},) = 0$

$\bar{c}_j = c_j - z_j = c_j - c_B\, y_j = c_j$

$z = c_B\, x_B = 0$

$c_j - z_j = c_j - c_B\, y_j = c_j - c_B\, \alpha_j$

Προσδιορισμός Μίας Αρχικής Βασικής Δυνατής Λύσης (3/3)

Θεωρούμε ότι όλοι οι περιορισμοί είναι ανισότητες >= με b>=0

$$
\mathbf{A} \quad \left[\begin{array}{ccccccc|cccc}
\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{1r} & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & & \ldots & 0 \\
\alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{2r} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\
\ldots & & & & & & & & & & \\
\ldots & & & & & & & & & & \\
\alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{mr} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & & \ldots & 1
\end{array}\right] \quad \mathbf{I}
$$

$$\mathbf{Ax + Ix_{\alpha} = (R, I)}$$

Όπου, $x_\alpha = [x\alpha_1, x\alpha_2 \ldots, x_{\alpha m}] >= 0$ (τεχνητές μεταβλητές)

Βασική Δυνατή Λύση: $x = 0$ και $x_\alpha = b >= 0$

Παράδειγμα Μεθόδου Simplex (1/7)

Max $z = 6x_1 + 5x_2$

υποκείμενο στους παρακάτω περιορισμούς:

$8x_1 + 11x_2 <= 28$

$4x_1 + 3x_2 <= 8$

$x_1, x_2 > 0$

$$\begin{bmatrix} 8 & 11 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \qquad X = b$

$\beta_1 = \alpha_3$

$\beta_2 = \alpha_4$

$$x_B = \begin{matrix} 28 \\ 8 \end{matrix}$$

$c_B = (0, 0)$

$x_1 = x_2 = 0$

$z = c_B x_B$

$c_j = c_j - z_j = c_j - c_B y_j = c_j$

$y_j = B^{-1} a_j = a_j$

Παράδειγμα Μεθόδου Simplex (2/7)

c_B	Cj / βάση	6 (x_1) α_1	5 (x_2) α_2	0 (x_3) α_3	0 (x_4) α_4	x_B (b)
0 $\mathbf{c_{B1}}$	$\beta_1 = \alpha_3$	8 $\mathbf{y_{11}}$	11 $\mathbf{y_{12}}$	1 $\mathbf{y_{13}}$	0 $\mathbf{y_{14}}$	28 $\mathbf{x_{B1}}$
r 0 $\mathbf{c_{B2}}$	$\beta_2 = \alpha_4$	4 $\mathbf{y_{21}}$	3 $\mathbf{y_{22}}$	0 $\mathbf{y_{23}}$	1 $\mathbf{y_{24}}$	8 $\mathbf{x_{B2}}$
	$c_j - z_j$	6	5	0	0	$z = 0$

κ

Επεξήγηση z_j (1/3)

- Έστω ότι αποφασίζουμε να αυξήσουμε κατά 1 μονάδα την τιμή της μη βασικής μεταβλητής x_1
- Για να συνεχίσουν να ικανοποιούνται οι περιορισμοί θα πρέπει οι τιμές των βασικών μεταβλητών να αλλάξουν.
- Οι σταθερές της στήλης x_1 δείχνουν το ποσό μείωσης στις παρούσες βασικές μεταβλητές όταν η μη βασική μεταβλητή x_1 αυξηθεί κατά 1. Αντίστοιχα ισχύουν για τις σταθερές όλων των μεταβλητών.

Επεξήγηση z_j (2/3)

- Παράδειγμα: Έστω ο περιορισμός:

  $8\ x_1 + 11\ x_2 <= 28$ ή

  $8\ x_1 + 11\ x_2 + 1\ x_3 = 28$
- Αν αυξηθεί το x_1 κατά 1, θα πρέπει να μειωθεί το x_3 κατά 8
- Η σταθερά 8 είναι ο συντελεστής y_{11}
- Αντίστοιχα συμβαίνει και για τα υπόλοιπα y_{ij}

Επεξήγηση z_j (3/3)

- Παράδειγμα: Εάν η x_2 γίνει βασική, τότε η x_3 θα πρέπει να μειωθεί κατά 11 και η x_4 κατά 3
- Για να υπολογιστούν τα z_j (η μείωση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης αν η x_j αυξηθεί κατά 1) θα πρέπει να υπολογιστούν τα αντίστοιχα αθροίσματα των γινομένων των c_B με τους αντίστοιχους συντελεστές.
- Παράδειγμα: Το z_1 είναι $y_{11}\, c_3 + y_{21}\, c_4 = 8 x 0 + 4 x 0 = 0$

Παράδειγμα Μεθόδου Simplex (3/7)

- Το μη βασικό διάνυσμα που θα εισέλθει σε προβλήματα μεγιστοποιήσεως είναι αυτό για το οποίο έχουμε το μεγαλύτερο θετικό οριακό καθαρό εισόδημα
- Όταν όλα τα οριακά καθαρά οριακά εισοδήματα γίνονται <= 0, τότε έχει βρεθεί η βέλτιστη λύση
- Σε περίπτωση προβλήματος ελαχιστοποιήσεως επιλέγεται το διάνυσμα με το απολύτως μεγαλύτερο αρνητικό οριακό καθαρό εισόδημα

Παράδειγμα Μεθόδου Simplex (4/7)

Το διάνυσμα που θα εξέλθει σε προβλήματα μεγιστοποιήσεως είναι αυτό το οποίο προσδιορίζεται από την σχέση:

$$\theta = x_{Br} / y_{rk} = \min (x_{Bi} / y_{ik} \, , \, y_{ik} > 0)$$

Παράδειγμα Μεθόδου Simplex (5/7)

c_B	βάση	(x_1) α_1	(x_2) α_2	(x_3) α_3	(x_4) α_4	x_B (b)
	Cj	6	5	0	0	
0 c_{B1} r	$\beta_1 = \alpha_3$	0 y_{11}	5 y_{12}	1 y_{13}	-2 y_{14}	12 x_{B1}
6 c_{B2}	$\beta_2 = \alpha_1$	1 y_{21}	0.75 y_{22}	0 y_{23}	0.25 y_{24}	2 x_{B2}
	$c_j - z_j$	0	0.5	0	-1.5	z = 12

κ

Παράδειγμα Μεθόδου Simplex (6/7)

	Cj	6	5	0	0	
c_B	βάση	(x_1) α_1	(x_2) α_2	(x_3) α_3	(x_4) α_4	x_B (b)
5 $\mathbf{c_{B1}}$	$\beta_1 = \alpha_2$	0 $\mathbf{y_{11}}$	1 $\mathbf{y_{12}}$	0.20 $\mathbf{y_{13}}$	-0.40 $\mathbf{y_{14}}$	2.4 $\mathbf{x_{B1}}$
6 $\mathbf{c_{B2}}$	$\beta_2 = \alpha_1$	1 $\mathbf{y_{21}}$	0 $\mathbf{y_{22}}$	-0.15 $\mathbf{y_{23}}$	0.55 $\mathbf{y_{24}}$	0.2 $\mathbf{x_{B2}}$
	$c_j - z_j$	0	0	-0.10	-1.30	z = 13.2

Παράδειγμα Μεθόδου Simplex (7/7)

…και τα τελικά αποτελέσματα είναι τα ακόλουθα:

$$x_2^* = 2.4$$

$$x_1^* = 0.2$$

$$z^* = 13.2$$

Πίνακας Μεθόδου Simplex

		c_j	c_1	c_2	…	c_j	…	c_n	
	c_{Bi}	Βάση	(x_1) a_1	(x_2) a_2	… …	(x_j) a_j	… …	(x_n) a_n	(x_{Bi}) (b)
	c_{B1}	β_1	y_{11}	y_{12}	…	y_{1j}	…	y_{1n}	x_{B1}
r	c_{B2}	β_2	y_{21}	y_{22}	…	y_{2j}	…	y_{2n}	x_{B2}
	…	…	…	…	…	…	…	…	...
	c_{Bm}	β_m	y_{m1}	y_{m2}	…	y_{mj}	…	y_{mn}	x_{Bm}
	$c_j - z_j$		$c_1 - z_1$	$c_2 - z_2$	…	$c_j - z_j$	…	$c_n - z_n$	**z**
				k					

Υπολογισμός Στοιχείων Νέου Πίνακα

		c_j	c_1	c_2	…	c_j	…	c_n	
	c_{Bi}	Βάση	(x_1) a_1	(x_2) a_2	… …	(x_j) a_j	… …	(x_n) a_n	(x_{Bi}) (b)
	c_{B1}	β_1	y_{11}	y_{12}	…	y_{1j}	…	y_{1n}	x_{B1}
r	c_{B2}	β_2	y_{21}	y_{22}	…	y_{2j}	…	y_{2n}	x_{B2}
	…	…	…	…	…	…	…	…	…
	c_{Bm}	β_m	y_{m1}	y_{m2}	…	y_{mj}	…	y_{mn}	x_{Bm}
	$c_j - z_j$		$c_1 - z_1$	$c_2 - z_2$	…	$c_j - z_j$	…	$c_n - z_n$	z
				k					

$$\hat{y}_{rj} = y_{rj} / y_{rk} \qquad \hat{y}_{ij} = y_{ij} - (y_{ik} / y_{rk})\, y_{rj} \qquad \hat{z} = z + [(c_k - z_k) / y_{rk}]\, x_{Br}$$

$$\hat{x}_{Br} = x_{Br} / y_{rk} \qquad \hat{x}_{Bi} = x_{Bi} - (y_{ik} / y_{rk})\, x_{Br} \qquad c_j - \hat{z}_j = (c_j - z_j) - y_{rj}\,(c_k - z_k) / y_{rk}$$

Παράδειγμα Μεθόδου Simplex (1/8)

Max $z = 50\,x_1 + 40\,x_2$

υποκείμενο στους παρακάτω περιορισμούς:

$$3\,x_1 + 5\,x_2 <= 150$$

$$x_2 <= 20$$

$$8\,x_1 + 5\,x_2 <= 300$$

$$x_1,\, x_2 > 0$$

Παράδειγμα Μεθόδου Simplex (2/8)

$$\text{Max } z = 50\,x_1 + 40\,x_2 + 0\,s_1 + 0\,s_2 + 0\,s_3$$

υποκείμενο στους παρακάτω περιορισμούς:

$$3\,x_1 + 5\,x_2 + 1s_1 = 150$$

$$1\,x_2 + 1\,s_2 = 20$$

$$8\,x_1 + 5\,x_2 + 1\,s_3 = 300$$

$$x_1, x_2 > 0$$

Παράδειγμα Μεθόδου Simplex (3/8)

c_B	C_j	C_1	C_2	…	C_n	x_B (b)
	βάση	(x_1) α_1	(x_2) α_2	…	(x_n) α_n	
	β_1	α_{11}	α_{12}	…	α_{1n}	b_1
	β_2	α_{21}	α_{22}	…	α_{2n}	b_2
	β_m	α_{m1}	α_{m2}	…	α_{mn}	b_m
	$c_j - z_j$					z

Συμβολισμοί

- C_j: Οι σταθερές των μεταβλητών i της αντικειμενικής συνάρτησης
- b_i: Οι δεξιές τιμές (όρια) των ισοτήτων
- α_{ij}: Οι δείκτες των μεταβλητών j στους περιορισμούς i

Παράδειγμα Μεθόδου Simplex (4/8)

c_B	C_j	50	40	0	0	0	
	βάση	(x_1)	(x_2)	S_1	S_2	S_3	(b)
0	s_1	3	5	1	0	0	150
0	s_2	0	1	0	1	0	20
0	s_3	8	5	0	0	1	300
	$c_j - z_j$						z

Συμβολισμών Συνέχεια...

- **z_j: Εκφράζει τη μείωση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης εάν μία μονάδα της μεταβλητής που αντιστοιχεί στη στήλη j εισέλθει στη βάση**
- **c_j - z_j: Εκφράζει την τελική καθαρή αλλαγή στην αντικειμενική συνάρτηση εάν μία μονάδα της μεταβλητής που αντιστοιχεί στη στήλη j εισέλθει στη βάση**

Παράδειγμα Μεθόδου Simplex (5/8)

c_B	C_j / βάση	50 (x_1)	40 (x_2)	0 S_1	0 S_2	0 S_3	(b)
0	s_1	3	5	1	0	0	150
0	s_2	0	1	0	1	0	20
0	s_3	8	5	0	0	1	300
	$c_j - z_j$	50	40	0	0	0	z=0

Υπολογισμός z_j (1/3)

- Έστω ότι μία μη βασική μεταβλητή, ας είναι αυτή η x_1 αυξάνεται κατά 1 (από 0 γίνεται 1)
- Για να συνεχίσουν να ικανοποιούνται οι περιορισμοί θα πρέπει να αλλάξουν οι τιμές κάποιων άλλων βασικών μεταβλητών

Υπολογισμός z_j (2/3)

$3\ x_1 + 5\ x_2 + 1s_1 = 150$ (1ος περιορισμός)

Για x_1=1, $3 + 1\ s_1 = 150$ ή $s_1 = 150 - 3$ (μείωση κατά 3)

$x_2 + 1s_2 = 20$ (2ος περιορισμός)

Δεν υπάρχει καμία μείωση (μείωση κατά 0)

$8\ x_1 + 5\ x_2 + 1s_3 = 300$ (3ος περιορισμός)

Για x_1=1, $8 + 1\ s_3 = 300$ ή $s_3 = 300 - 8$ (μείωση κατά 8)

Άρα $z_1 = 0 * (3) + 0 * (0) + 0 * (8) = 0$

Υπολογισμός z_j (3/3)

- Τα z_j υπολογίζονται πολλαπλασιάζοντας τα C_B με τα αντίστοιχα α_{ij}
- Έχουμε στο παράδειγμά μας:
  - $Z_1 = 0(3) + 0(0) + 0(8)$
  - $Z_2 = 0(5) + 0(1) + 0(5)$
  - $Z_3 = 0(1) + 0(0) + 0(0)$
  - $Z_4 = 0(0) + 0(1) + 0(0)$
  - $Z_5 = 0(0) + 0(0) + 0(1)$

Υπολογισμός $c_j - z_j$

- **Από τη μια υπάρχει μείωση της αντικειμενικής συνάρτησης λόγω μείωσης κάποιων βασικών μεταβλητών, από την άλλη υπάρχει όμως πιθανή αύξηση λόγω της αύξησης της μη βασικής μεταβλητής κατά μία μονάδα**
- **Γι' αυτό το λόγο υπολογίζουμε τα $c_j - z_j$ για κάθε στήλη**

Επιλογή Διανύσματος που θα Εισέλθει στη Βάση

- **Το διάνυσμα που θα εισέλθει σε προβλήματα μεγιστοποιήσεως είναι αυτό με το μεγαλύτερο καθαρό οριακό εισόδημα (το πιο ωφέλιμο)**

Επιλογή Διανύσματος που θα Εξέλθει από τη Βάση

- Το διάνυσμα που θα εξέλθει σε προβλήματα μεγιστοποιήσεως είναι αυτό που συνεισφέρει λιγότερο στην αντικειμενική συνάρτηση, δηλαδή αυτό που τοποθετεί τον μεγαλύτερο περιορισμό στην τιμή που μπορεί να πάρει η μεταβλητή που θα εισέλθει (το λιγότερο ωφέλιμο)

Παράδειγμα Επιλογής Διανύσματος που θα Εξέλθει από τη Βάση

$3\ x_1 + 5\ x_2 + 1s_1 = 150$ (1ος περιορισμός)

$3\ x_1 + 1\ s_1 = 150$ ή $x_1 = 150 / 3$ για $s_1 = 0$ (μέγιστη τιμή x_1)

$8\ x_1 + 5\ x_2 + 1s_3 = 300$ (3ος περιορισμός)

$8\ x_1 + 1\ s_3 = 300$ ή $x_1 = 300 / 8$ για $s_2 = 0$ (μέγιστη τιμή x_1)

Ο 3ος περιορισμός είναι και ο πιο σκληρός, άρα διώχνουμε το αντίστοιχο διάνυσμα

Υπολογισμός Νέου Πίνακα Simplex

- Πραγματοποιώ πράξεις μεταξύ γραμμών ακολουθώντας του επόμενους βασικούς κανόνες:
  - Μπορώ να πολλαπλασιάζω οποιαδήποτε γραμμή με ένα μη μηδενικό αριθμό
  - Μπορώ να αντικαθιστώ τη γραμμή με το αποτέλεσμα πρόσθεσής της ή αφαίρεσής της με οποιοδήποτε γινόμενο άλλης

Παράδειγμα Υπολογισμού Νέου Πίνακα Simplex

- **Αφού βασικό διάνυσμα θα γίνει αυτό που αντιστοιχεί στην μεταβλητή x_1, θέλω το διάνυσμα να είναι της μορφής [0,0,1]**

- **Πολλαπλασιάζω την 3η εξίσωση με 1/8 και έχω:**

  $1/8\ (8\ x_1 + 5\ x_2 + 1\ s_3) = 1/8\ (300)$ ή

  $x_1 + 5/8\ x_2 + 1/8\ s_3) = 75/2$

- **Πολλαπλασιάζω τη νέα γραμμή με 3 και την αφαιρώ από την 1:**

  $0x_1 + 25/8\ x_2 + 1s_1 - 3/8\ s_3 = 75/2$

Παράδειγμα Μεθόδου Simplex (6/8)

c_B	C_j	50	40	0	0	0	
	βάση	(x_1)	(x_2)	S_1	S_2	S_3	(b)
0	s_1	0	25/8	1	0	-3/8	75/2
0	s_2	0	1	0	1	0	20
50	x_1	1	5/8	0	0	1/8	75/2
	$c_j - z_j$	0	70/8	0	0	-50/8	z=1875

Παράδειγμα Μεθόδου Simplex (6/8)

	C_j	50	40			0	
c_B	βάση	(x_1)	(x_2)	S_1	S_2	S_3	(b)
0	s_1	0	25/8	1	0	-3/8	75/2
0	s_2	0	1		1	0	20
	x_1		5/8	0	0	1/8	75/2
	$c_j - z_j$						

Παράδειγμα Μεθόδου Simplex (7/8)

c_B	C_j	50	40	0	0	0	
	βάση	(x_1)	(x_2)	(S_1)	(S_2)	(S_3)	(b)
40	x_2	0	1	8/25	0	-3/25	12
0	s_2	0	0	-8/25	1	3/25	8
50	x_1	1	0	-5/25	0	5/25	30
	$c_j - z_j$	0	0	-14/5	0	-26/5	z=1980

Παράδειγμα Μεθόδου Simplex (8/8)

…και τα τελικά αποτελέσματα είναι τα ακόλουθα:

$$x_2^* = 12$$

$$x_1^* = 30$$

$$s_2^* = 8$$

$$z^* = 1980$$

Ερωτήσεις...


Statistics show...
A + B=C
Bioeconomics
Today's News
Picasso's blue period
$ $ $ $ $
E=MC²
The sum of the part
©R. Morley Inc.